

به نام خدا

تمرین مصل 2

10-12, 39, 54

فَضایِ برداری در قضای سَلَّال

در این درس بسیاری از کَلَلِ حارا در قضای سَلَّال با فضا برداری متناظر با قضای
سَلَّال انجام می دهیم. به همین جهت در این بخش به بیان خصوصیات قضای سَلَّال
و قضای برداری متناظر با آن می پردازیم. برای سادگی از قضای برداری شروع
می کنیم.

در یک فضای برداری n بعدی با پایه‌های سرهم داریم که دارای n مرتبه (یا n عنصر) هستند

$$\underline{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T$$

در یک فضای n بعدی، n بردار پایه به صورت $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ داریم که هر بردار در فضای برداری توان به صورت ترکیب خطی از این n بردار پایه نوشت،

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i \underline{e}_i$$

در واقع: اندازهای مقیاس بردار $\underline{v}$ بر روی بردارهای زام (یعنی $\underline{e}$) است.
درباره مقایسه برداری، عملیات ضرب داخلی در بردار $\underline{v}_1$ و $\underline{v}_2$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \underline{v}_1 \cdot \overset{\uparrow}{\underline{v}_2} = \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = \sum_{i=1}^n v_{1i} v_{2i} \equiv \text{اسکالر}$$

$$\underline{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n})^T$$

$$\underline{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n})^T$$

* منظم تعامله در بردار $\underline{v}$ با یک ضرب داخلی تعریف می شود. در بردار $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ /
 معامله کنیم اگر ضرب داخلی آنها برابر صفر باشد،

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \underline{v}_1 \perp \underline{v}_2$$

* نرم (یا اندازه) $\underline{v}$ یک بردار را نیز می توان با یک ضرب داخلی تعریف کرد،

$$\| \underline{v} \|_2^2 = \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2$$

↑
صفتی

$\| \underline{v} \|_2$: نرم برسه کی دوم یا نرم اقلیدسی
 ! فردینوس

* یک مجموعه از m بردار $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ را اورترونرمال (orthonormal) می‌گوئیم اگر در دو متعامد و با نرم واحد باشند.

$$\forall i \neq j, \quad \underline{v}_i \perp \underline{v}_j.$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}; \quad \|\underline{v}_i\| = 1$$

* یک مجموعه از m بردار $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ را مستقل خطی می‌گوئیم اگر هیچ یک از بردارها را نتوان به صورت ترکیب خطی از بقیه ی بردارها نوشت.

$$\exists a_1, \dots, a_m \quad ; \quad a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_m \underline{v}_m = \underline{0} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$$

$\Leftarrow$ برداری $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ مثل خط صند.

* در فضای برداری، برای هر بردار $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ ، ساری مثلثی به شرح زیر برقرار است،

$$\| \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \| \leq \| \underline{v}_1 \| + \| \underline{v}_2 \|$$

سادگی ریاضی برقرار است که در بردار $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ هم جهت باشند یعنی

$$\exists a \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad \underline{v}_1 = a \underline{v}_2$$

* در فضای برداری، برای هر دو بردار $\underline{v}_1$ و $\underline{v}_2$ ، ناسازی شرارتیه
صورت زیر برقرار است.

$$|\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle|^2 \leq \|\underline{v}_1\|^2 \|\underline{v}_2\|^2$$

تساوی زمانی برقرار است که $\underline{v}_1$ و $\underline{v}_2$ هم راست باشند یعنی

$$\exists a \in \mathbb{R} ; \quad \underline{v}_1 = a \underline{v}_2$$

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \|\underline{v}_1\| \|\underline{v}_2\| \cos \theta$$

* بردارهای ویژه در متناظر دژیه ماتریس $A_{n \times n}$

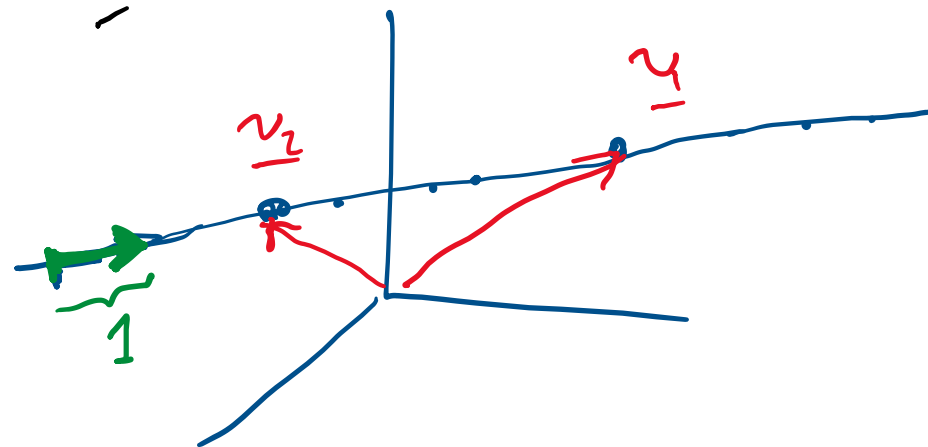
$$A \underline{v} = \underline{\lambda v}$$

بردار ویژه
مقدار دژیه متناظر با بردار
دژیه $\underline{\lambda}$

در ادامه می خواهم زیرفضای برداری شامل m بردار $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ استخراج کنم. به عبارت دیگر می خواهم بردارهای پایه ای این زیرفضا را بدست بیاوریم.
در عمل با داشتن بردارهای پایه ای $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ می توان زیرفضا را به مقدار کامل ترکیب کرد و تجزیه کامل

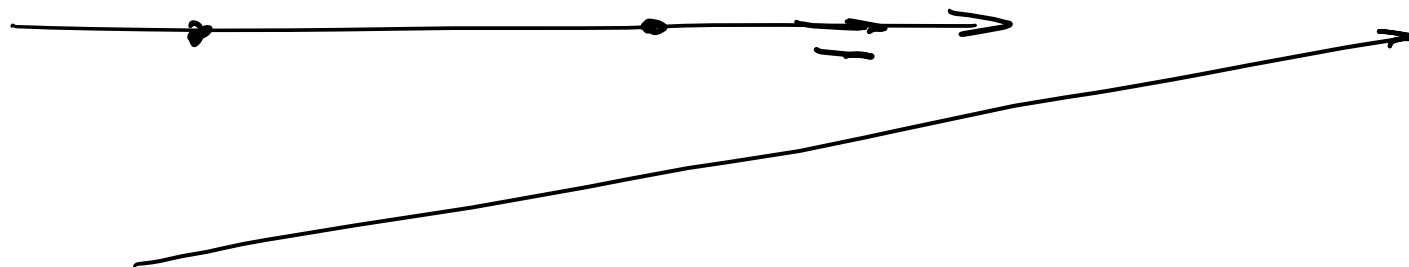
نمود

برای این منظور از ریش
گرام-انجیت استفاده می کنیم.



$$(-1, -1, \dots, -1)^T$$

$$(1, 1, 1, \dots, 1)^T$$



Gram - schmidt

* روش گرام - شمیت

m بردار $v_1, v_2, \dots, v_m$ به شکل n در نظر می گیریم. / بردارهای

یک فضای n بعدی هستند) هدف به دست آوردن بردارهای پایه، برای زیر فضای
شامل بردارهای $v_1, \dots, v_m$ است.

۱- بعضی از بردارهای پایه را انتخاب می کنیم که آن را از مابقی می بینیم و به عنوان پایه بردارهای
در نظر می گیریم.

به عنوان مثال $\underline{v}_1$ را انتخاب می کنیم،

$$1) \quad \underline{u}_1 = \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|}$$

اولین بردار پایه

۲- پس از بردارهای که در مراحل قبلی الگوریتم انتخاب شده است انتخاب می کنیم و
صورت آن را در راستای بردارهای پایه می برداریم که آمده در مراحل قبل از خودشان
می کنیم. بردار حاصل از مالتیپلیکاسیون به عنوان بردار پایه بعدی در نظر می گیریم.

۳- مرحله ۲ را تکرار می کنیم تا تمام بردارهای $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ در الگوریتم اعمال شوند.

بہ عنوان مثال در مرحله ی دوم ، $\underline{v}_2$ را انتخاب می کنیم.

$$\underline{u}'_2 = \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_2, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1$$

$$\Rightarrow \underline{u}_2 = \frac{\underline{u}'_2}{\|\underline{u}'_2\|^2}$$

✓ بردار یابی درم

بہ عنوان مثال در مرحله ی بعدی $\underline{v}_3$ را انتخاب می کنیم.

$$\underline{u}'_3 = \underline{v}_3 - \langle \underline{v}_3, \underline{u}_1 \rangle \underline{u}_1 - \langle \underline{v}_3, \underline{u}_2 \rangle \underline{u}_2$$

$$\Rightarrow \underline{u}_3 = \frac{\underline{u}'_3}{\|\underline{u}'_3\|}$$

✓ بردار یابی درم

* رانتهای آلدردسته: N بردار پایه‌ی $u_1, u_2, \dots, u_n$ ضرایبم برده
 که بردارهای پایه‌ی زیرفضای ساخته شده توسط بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_m$
 هستند.

* در واقع $u_1, u_2, \dots, u_n$ بردارهای پایه‌ی زیرفضای N بعدی از فضای
 n بعدی دارند هستند که توسط بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_m$ ساخته شده است.

* همواره داریم $N \leq m$ (چون $n \leq m$). اگر بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_m$ مستقل خطی
 باشند $m \leq n$

باشند خدایم را شت

$$N = m$$

* اگر در هر طری خواص از آنکه در شتم $||Z|| = 0$ بر مگر باشد، به این معنی

است که بر دار زیه به صورت ترکیب خطی از سبیه ی برابر ها قابل نمایش است.

از این جهت این برابر را از آنکه در شتم خارج می شتم و آنکه در شتم برابر های باقی مانده

از به س دهم.

* اگر در این که در شتم را شته باشم $m \geq n$ س تران نرشت $N \leq n$

* جواب ردش گرام - اثبات مختصر زیر نیست در اساس ترتیب انتخاب بردارهای
ای. ... در مراحل مختلف الگوریتم، جواب های متفاوتی ممکن است حاصل شود.
دارای فراموشی فضای سیگنال را معرفی کنیم. فضای برداری متناظر با فضای سیگنال
را استخراج کنیم.

فضای سیگنال *Signal space*
برای مجموعه ای از سیگنال ها مانند $x(t)$ که در بازه ی $t \in [a, b]$ تعریف شده اند
می توان مشابه فضای برداری، یک فضای سیگنال را تعریف کرد.

* در فضای سکیل داخلی در سکیل $x_1(t)$, $x_2(t)$ به صورت زیر تعریف

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_a^b x_1(t) x_2^*(t) dt \quad \text{س شوره}$$

* در سکیل $x_1(t)$, $x_2(t)$ متعامد در سکیل $x_1(t)$, $x_2(t)$ در فضای داخلی آنها برابر صفر باشد

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) \perp x_2(t)$$

$$x_1(t) \perp x_2(t)$$

* نرم، اندازه‌ی کمینال $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x(t)\|_2^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt$$

$\|x(t)\|$: نرم، اندازه کمینال (مرتبه‌ی دوم، انرژی‌سی، زیرمقیاس)

$\|x(t)\|^2$: حاصل انرژی کمینال است.

x در فضای کمینال، مجموعه‌ای از m کمینال $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ را می‌توان

به صورت زیر در یک معادله با نرم واحد نوشت. یعنی

$$\forall i \neq j ; \quad \langle x_i(t), x_j(t) \rangle = 0$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\} ; \quad \|x_i(t)\| = 1$$

* مجموعه m سینال $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ مستقل خطی
 می گیریم اگر هیچ یک از این سینال ها را بتوان به صورت ترکیب خطی از بقیه نوشت.
 linear Independent

* در فضای هیلبرت، برای هر دو سیگنال دلخواه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ناسازی مثلثی زیر برقرار است،

$$\|x_1(t) + x_2(t)\| \leq \|x_1(t)\| + \|x_2(t)\|$$

* در فضای هیلبرت، برای هر دو سیگنال دلخواه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ناسازی سزار-بیز زیر برقرار است،

$$\left| \int_a^b x_1(t) x_2^*(t) dt \right|^2 \leq \int_a^b |x_1(t)|^2 dt \int_a^b |x_2(t)|^2 dt$$

$$|\langle x_1(t), x_2(t) \rangle|^2 \leq \|x_1(t)\|^2 \|x_2(t)\|^2$$

$$\frac{1}{-} \quad | \langle x_1(t), x_2(t) \rangle | \leq \|x_1(t)\| \|x_2(t)\|$$

ستادی زمانی برقرار است که داشته باشیم،

$$\exists c \in \mathbb{C} \quad ; \quad x_1(t) = c x_2(t)$$

در فضای سگنل، هر سگنل با انرژی محدود را می توان به صورت ترکیب خطی از تراج

پایه‌ی ارتعاشی نوشت. در واقع با کمک این تراج پایه، می توان ارتباط بین فضای

سگنل و فضای برداری متناظر با آن به دست آورد. یکی از روشهای به دست آوردن

تراجع یا یہی ارتد زوال، ردش کُرامِ انتمیّت است۔ در ادامه استدلالش کہ کُرامِ انتمیّت
ارتد صانعِ رحیم رسید در مرتبہ حقایق معاصر سَلالِ اُمّیّہ سَلالِ صحبّہ می لسنم
تا آری اُطّ مَقای سَلالِ ر مَقای برداری شاطِرا بان مَشغول شد۔

* روش نرام - انجمن

مجموعه‌ای از n سیگنال $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ که وابسته‌ی $t \in [a, b]$ تعریف شده‌اند، از طریق تراج یا به‌ی ارتعاشات برای قضای سیگنال سافت شده توسط این n سیگنال به‌رست بیادیم. (سیگنال 4 با انرژی محدود و صند)

۱- یکی از تراج $x_1(t), \dots, x_n(t)$ را به رگزار، انتخاب می کنیم و آن را نرمالیزه کرد. به

عنوان اولین تابع پایه در نظر می گیریم.

به عنوان مثال $x_1(t)$ را انتخاب می کنیم،

$$\underline{f_1(t)} = \frac{x_1(t)}{\|x_1(t)\|}$$

تابع پایه اول

۲- یکی از تراج $x_1(t), \dots, x_n(t)$ را که در مرحله قبل انتخاب شده اند، به رگزار انتخاب می کنیم و تصویر آن را به استای تراج پایه می بردست آمد. در مرحله قبل از فردش کم می کنیم.

تابع به دست آمده، از مالزیه سیکنم در عنوان تابع پاری بعدی در نظر سیکنم.

به عنوان مثال در حلهی دوم سکیل $x_2(t)$ انتخاب سیکنم.

$$f_2'(t) = x_2(t) - \underbrace{\langle x_2(t), f_1(t) \rangle}_{C_2} f_1(t)$$

$$\Rightarrow f_2(t) = \frac{f_2'(t)}{\|f_2'(t)\|} = \frac{f_2'(t)}{\sqrt{E_2'}}$$

$$f_2'(t) \text{ سکیل مالزیه: } E_2' = \|f_2'(t)\|^2 = \int_a^b |f_2'(t)|^2 dt$$

صوری $x_2(t)$: $C_{12} = \langle x_2(t), f_1(t) \rangle = \int_a^b x_2(t) f_1'(t) dt$
 است $f_1(t)$

$$E_2' = \int_a^b |f_2'(t)|^2 dt = \int_a^b (x_2(t) - C_{12} f_1(t)) (x_2(t) - C_{12} f_1(t))' dt$$

$$f_2'(t) = x_2(t) - C_{12} f_1(t)$$

$$\Rightarrow E_2' = \underbrace{\int_a^b |x_2(t)|^2 dt}_{E_2} + |C_{12}|^2 \underbrace{\int_a^b |f_1(t)|^2 dt}_1 - 2|C_{12}|^2 = E_2 - |C_{12}|^2 \geq 0$$

به عنوان مثال، فرض کنیم در مرحله k اسم اندریت، سیدیل $x_k(t)$ انتخاب شده است.

$$f'_k(t) = x_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik} f_i(t)$$

$$, c_{ik} = \langle x_k(t), f_i(t) \rangle = \int_a^b x_k(t) f_i(t) dt$$

$$, E'_k = E_k - \sum_{i=1}^{k-1} |c_{ik}|^2$$

$$f_k(t) = \frac{f'_k(t)}{\|f'_k(t)\|} = \frac{f'_k(t)}{\sqrt{E'_k}}$$

الگوریتم اِندراسی کسب تابع N تابع پایه به صورت $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$

برسیم. در فضای سگنال ساخته شده ترسکه سگنالهای $x_1(t), \dots, x_m(t)$

حرکتی را می توان به صورت ترکیب خطی از این N تابع پایه ای ارسترهال

$$\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$$

نرشت.

همه ی شانه ی که در مورد روش تراسمیت در فضای برداری بیان کردیم، در فضای سگنال نیز به طور مشابه برقرار است.

نکته: نشان دهنده تراج

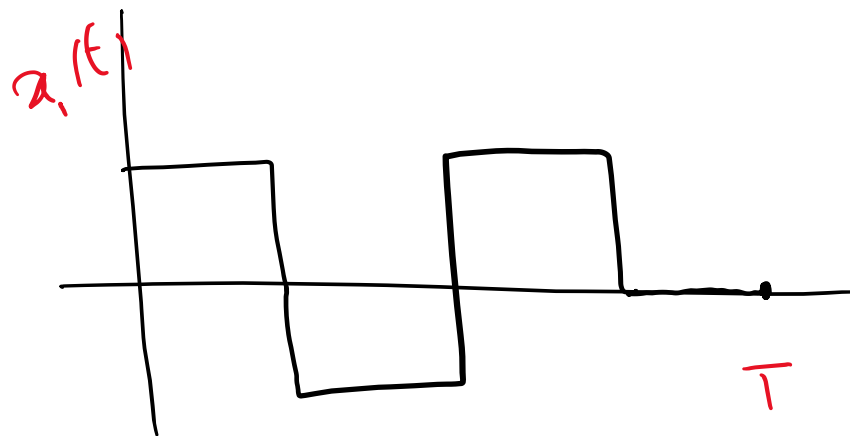
$$p_1(t), \dots, p_n(t)$$

حاصل از اندر استیم کرام - اشعیه

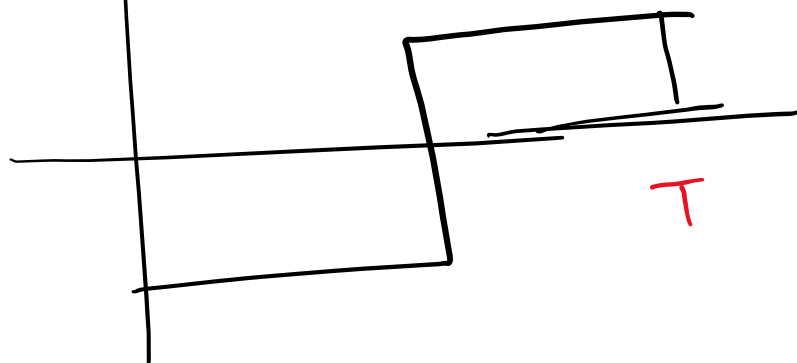
در به در معامه حسنه

دارامه در صدر و معامه سلیله در قضای سلیله و
قضای براری متناظر آن محبت خراصیم کرد.

$$(1, -1, 1, 0) = \underline{v}_1$$



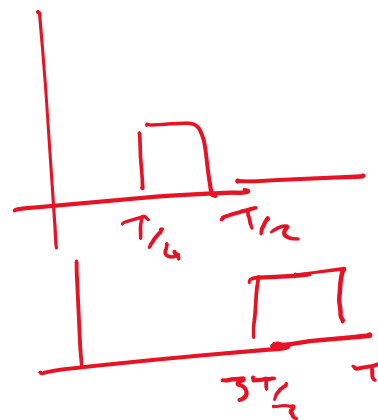
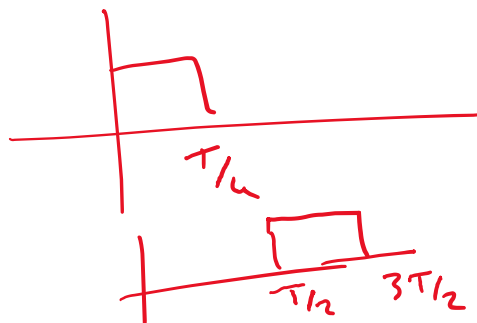
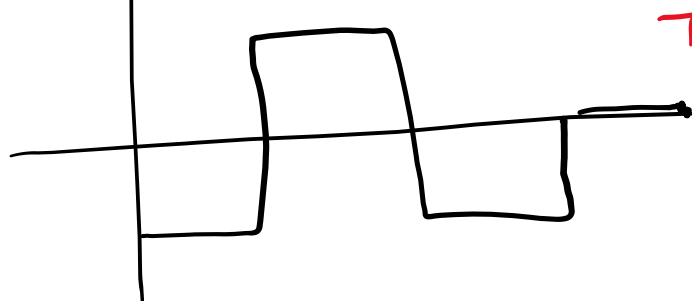
$$(-1, -1, 1, 1)$$

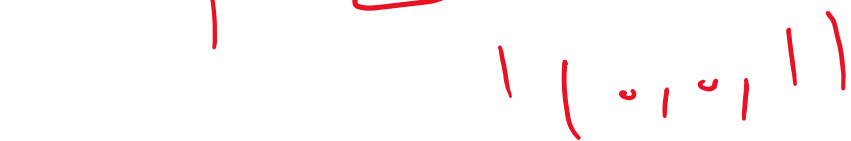
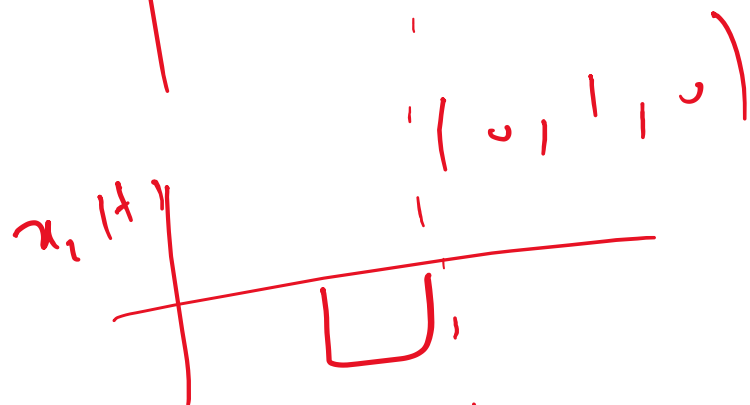
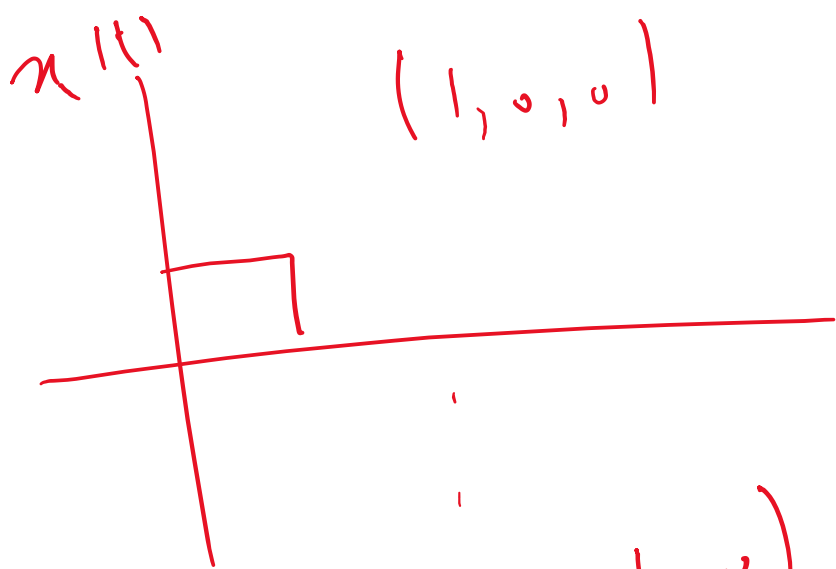


$$(1, 1, 1, 1)$$



$$(-1, 1, -1, 0)$$



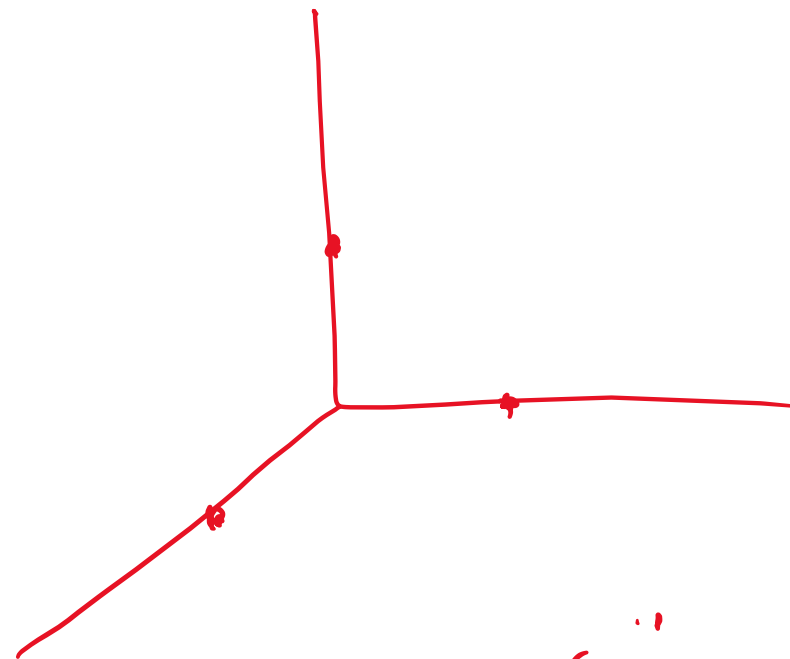


فضای برداری

$$f_1(t) = \frac{x_1(t)}{\|x_1\|}$$

f_2

f_3



فضای برداری متناظر

